# 多項式個の極小セパレータを持つグラフクラスについて (理論計算機科学の新展開)

AUTHOR(S):

長澤, 亮介; 加藤, 達也; 木野, 徹; 山崎, 浩一

数理解析研究所講究録
第 1849 巻 2013 年 91-95



# 多項式個の極小セパレータを持つグラフクラスについて

# On graph classes with polynomial number of minimal separators

長澤 亮介 (Ryosuke Nagasawa) * 加藤 達也 (Tatsuya Kato) * 木野 徹 (Toru Kino) *
山崎 浩一 (Koichi Yamazaki)*†

## 1 はじめに

本稿では, 多項式個の極小セパレータを持つグラフクラスについて研究を行う. そのようなグラフクラスに対しては, 木幅や最小充填問題などのいくつかの問題が多項式時間で解けることもあり, 古くから研究されている.

よく知られた結果として, 置換グラフからなるグラフクラスは多項式個の極小セパレータを持つことが知られている [1]. この結果はさらに拡張されており, 次元がバウンドされた台形グラフからなるグラフクラス [2] や弱コーダルグラフからなるグラフクラス [3] が多項式個の極小セパレータを持つことが知られている.

置換グラフに対する結果の別の拡張としては, 置換グラフを真に含む, AT-free ∩ co-AT-free グラフからなるグラフクラスも, 多項式個の極小セパレータを持つことが知られている [5]. さらにこの結果は拡張され, グラフ自身とその補グラフの asteroidal number がともにバウンドされているグラフからなるグラフクラスもやはり多項式個の極小セパレータを持つことが知られている [5].

本稿では, 文献 [5] で使われている技法を基に, グラフクラスが多項式個の極小セパレータを持つための必要または十分な構造が何であるかを研究する. 得られた結果としては, 先ず強 $X$-type と弱 $X$-type という構造を定義し, それらを用いて必要および十分条件を与える.

* 群馬大学 (Gunma University)
† 本研究は JSPS 科研費 24500007 の助成を受けたものです。

## 2 諸定義

$G$ をグラフとする. このとき $V(G), E(G)$ でそれぞれ $G$ の頂点集合, 辺集合を表す. ($G$ の) 頂点 $v$ と隣接する頂点の集合を $N_G(v)$ または単に $N(v)$ と表す. 部分集合 $U \subseteq V(G)$ に対して, $U$ より誘導される $G$ の部分グラフを $G[U]$ と表す.

$S$ を $G$ の頂点部分集合とする. 隣接していない 2 頂点 $a$ と $b$ に対して, $S$ が **$a, b$-セパレータ**であるとは, $S$ を取り除いた時に $a$ と $b$ が異なるコンポーネントに属するときをいう. もし $S$ の真部分集合に $a, b$-セパレータが存在しないならば, $S$ は**極小 $a, b$-セパレータ**と呼ばれる. $S$ が**極小セパレータ**とは, 隣接していないある 2 頂点 $a$ と $b$ が存在し, $S$ が極小 $a, b$-セパレータであるときをいう. $|sep(G)|$ で, $G$ の極小セパレータ全体からなる集合を表す.

$S$ をグラフ $G$ の極小セパレータとする. $G \backslash S$ におけるコンポーネントの集合を $\mathscr{C}_G(S)$ と表す. コンポーネント $C \in \mathscr{C}_G(S)$ が ($S$ に対して) **フルコンポーネント**であるとは, $S \subseteq N(C)$ を満たすときをいう.

極小セパレータとフルコンポーネントの関係として次の定理が知られている.

**定理 1.** [4] $S$ が $G$ の極小セパレータである必要十分条件は, $\mathscr{C}_G(S)$ が少なくとも 2 つの ($S$ に対する) フルコンポーネントを持つことである.

$P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset V(G)$ とする. $P$ が $U \subset V(G)$ を**配偶者被覆する**とは, 次を満たすときをいう:

- $U \subseteq N(P)$ かつ
- 以下を満たす $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq U$ が存在する:
  - $\{\{p_i, u_i\} | 1 \leq i \leq k\} \in E(G)$ かつ

– $\{\{p_i, u_j\} | i \neq j\} \not\subseteq E(G)$.

$P$ において, $u_i$ を $p_i$ の (また $p_i$ を $u_i$ の) **配偶者**と呼ぶ. $U \subseteq N(P)$ を満たす極小な $P$ は, $U$ を配偶者被覆することに注意.

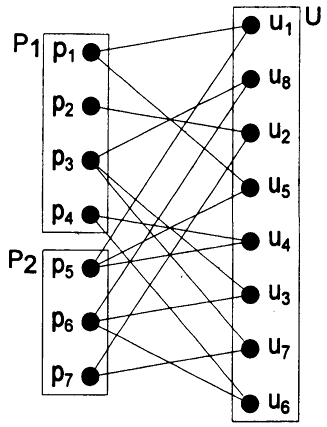


図 1 配偶者被覆

図 1 では, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ が $U = \{u_1, \ldots, u_8\}$ を配偶者被覆しており, $p_1, p_2, p_3, p_4$ の配偶者はそれぞれ $u_1, u_2, u_3, u_4$ ととれる. また, $P = \{p_5, p_6, p_7\}$ が $U = \{u_1, \ldots, u_8\}$ を配偶者被覆しており, $p_5, p_6, p_7$ の配偶者はそれぞれ $u_5, u_6, u_7$ と取れる.

### 2.1 強 $X$-type と弱 $X$-type

4 つ組み $\mathrm{SX} = (A, B, \Gamma, \Delta)$ がグラフ $G$ の**強 $X$-type** (図 2 参照) であるとは, 以下を満たすように $V(G)$ を $A$, $B$, $\Gamma$, および $\Delta$ の 4 つに分割できるときをいう:

C1. ある自然数 $k$ が存在し, $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ と表せ, 以下を満たす:
- $\{\{\beta_i, \gamma_i\} | 1 \leq i \leq k\} \subseteq E(G)$ かつ
- $\{\{\beta_i, \gamma_j\} | i \neq j\} \cap E(G) = \emptyset$.

C2. ある部分集合 $A' \subseteq A$ が存在し, $B$ の任意の部分集合 $B'$ に対し $G[(A' \cup B) \setminus B']$ が連結となる.

C3. ある部分集合 $\Delta' \subseteq \Delta$ が存在し, $\Gamma$ の任意の部分集合 $\Gamma'$ に対し $G[(\Delta' \cup \Gamma) \setminus \Gamma']$ が連結となる.

C4. $N(A) \cap (\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$ かつ $N(\Delta) \cap (A \cup B) = \emptyset$ である.

上記の $k$ を SX **の強オーダー**と呼び, qsxord (SX) と表す. 一般に, 以下を満たす $\mathrm{SX}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1)$, $\mathrm{SX}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2)$ が存在する:

- $\mathrm{SX}_1 \neq \mathrm{SX}_2$ かつ
- $\mathrm{SX}_1$ も $\mathrm{SX}_2$ も $G$ の強 $X$-type かつ
- $\mathrm{qsxord}(\mathrm{SX}_1) \neq \mathrm{qsxord}(\mathrm{SX}_2)$.

$G$ の強 $X$-type の集合を $\mathscr{X}_s(G)$ と表し, $\max_{\mathrm{SX} \in \mathscr{X}_s(G)} \mathrm{qsxord(SX)}$ を $G$ **の強 $X$-type オーダー**と呼び, sxord (G) と表す.

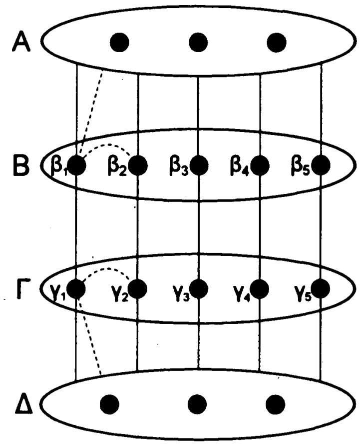


図 2 オーダーが 5 の強 $X$-type.

グラフ $G$ のある誘導部分グラフ $G' = G[U]$ が ($G$ において) **弱 $X$-type** (図 3 参照) であるとは, 強 $X$-type での C1 と C2 を満たすように $U$ を $A$, $B$, および $\Gamma$ の 3 つに分割できるときをいう. 強オーダーと同様に, $|B| (= |\Gamma|)$ を $G'$ **の弱オーダー**と呼び, $\mathrm{lwxord}_G(G')$ と表す. また, $G$ において弱 $X$-type である ($G$ の) 誘導部分グラフの集合を $\mathscr{X}_w(G)$ と表し, $\max_{G' \in \mathscr{X}_w(G)} \mathrm{lwxord}_G(G')$, を $G$ **の弱 $X$-type オーダー**と呼び, wxord (G) と表す.

## 3 結果

### 3.1 Good なグラフクラス

グラフクラス $\mathscr{G}$ が **Good** であるとは, 任意のグラフ $G \in \mathscr{G}$ に対し $\mathrm{wxord}(G) \leq c$ を満たすある定数 $c$ が存在するときをいう.

**$\mathscr{G}$ が多項式個の極小セパレータを持つ**とは, ある多項式 $P$ と定数 $n_0$ が存在し, $|V(G)| \geq n_0$ なる任意の $G$ に対して $|sep(G)| \leq P(|V(G)|)$ が成り立つと

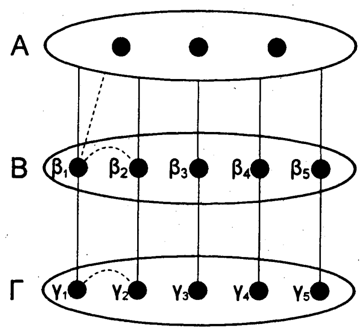


図 3　オーダーが 5 の弱 $X$-type.

きをいう.

**補題 3.1.** $C$ を $S$ に対するフルコンポーネントとする. このとき $S$ に対して配偶者被覆するような $N \subseteq C$ が少なくともひとつ存在する.

**証明.** $C$ は $S$ に対するフルコンポーネントより, $S \subseteq N(C)$ を満たす. よって $S \subseteq N(N)$ を満たす極小の $N \subseteq C$ を考えることができ, そのような $N$ は $S$ を配偶者被覆する. □

**補題 3.2.** グラフ $G$ が $\mathrm{wxord}(G) \leq k$ を満たすなら, $G$ の任意の極小セパレータ $S$ に対して, $S$ の配偶者被覆のサイズは高々 $k$ である.

**証明.** $S$ を $G$ の任意の極小セパレータとし $C_1, C_2$ を $G \backslash S$ のフルコンポーネントとする. $N_1 \subseteq C_1$, $N_2 \subseteq C_2$ を $S$ を配偶者被覆する頂点集合とする (補題 3.1 より $N_1, N_2$ が存在する). 一般性を失うことなく $|N_2| \geq |N_1|$ と仮定できる. ここで $N_2$ のサイズを $\ell$ で表し, $|N_2| = \ell > k$ を仮定し, $N_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\}$ と表す. また各頂点 $\gamma_i$ の配偶者を $\beta_i$ で表し, $S' = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\} (\subseteq S)$ と表す.

ここで, $A$ および $A'$ として $C_1$ を, $B$ として $S'$ を, $\Gamma$ として $N_2$ を取ることにする. このように取ることで, $(A, B, \Gamma)$ が弱 $X$-type での条件 $C1, C2$ を満たすことを以下に示す.

$N_2$ は $S'$ を配偶者被覆しているため, 条件 $C1$ を満たすことは明らか. $C_1$ は $S$ に対してフルコンポーネントであるため, $C_1 = A$ が $S$ に対するフルコンポーネントであることより, 任意の $v \in S$ に対し $v$ と隣接しかつ $C_1$ に属する頂点が存在する. このことに注意すると, $S'$ に属する任意の 2 頂点 $x, y \in S'$ に対し, $\{x, x'\} \in E(G)$, $\{y, y'\} \in E(G)$ なる頂点 $x', y' \in C_1$ が存在する ($x' = y'$ であるかもしれない). $C_1$ の連結性より, $x'$ と $y'$ を結ぶ $C_1$ 内のパスが存在するので, $x$ と $y$ は $\{x, y\} \cup C_1$ で連結である. 従って弱 $X$-type での条件 $C2$ を満たす.

結局, $(A, B, \Gamma)$ はオーダー $\ell > k$ の弱 $X$-type となり矛盾. 従って任意の極小セパレータ $S$ に対して極小な配偶者被覆のサイズは高々 $k$ である. □

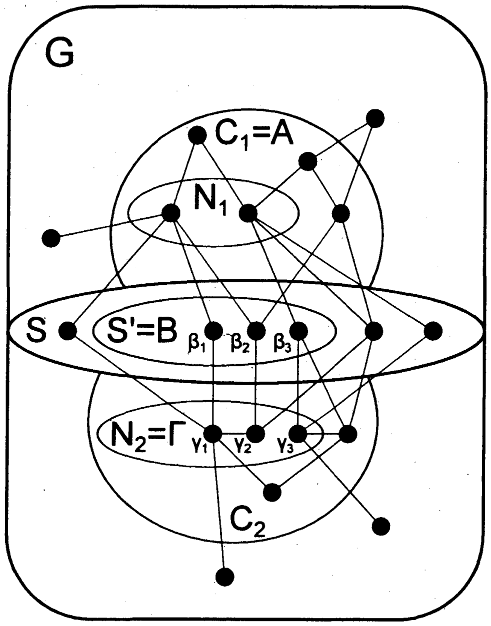


図 4　補題 3.2 での $A, A', B, \Gamma$ の取り方.

以下の補題 3.3, 3.4 から定理 2 が成り立つ.

**補題 3.3.** グラフ $G$ の任意の極小セパレータ $S$ に対し, $N(N_1) \cap N(N_2) = S$ なる $S$ の配偶者被覆のペア $N_1, N_2$ が存在する.

**証明.** $S$ が極小セパレータより, $G \backslash S$ のフルコンポーネント $C_1, C_2$ が存在する. $C_1, C_2$ が $S$ のフルコンポーネントより, $S$ の配偶者被覆のペア $N_1 \subseteq C_1$, $N_2 \subseteq C_2$ が存在する. このとき, $N(C_1) \cap N(C_2) = S$, $N_1 \subseteq C_1$, $N_2 \subseteq C_2$, $S \subseteq N(N_1)$, $S \subseteq N(N_2)$ より, $N(N_1) \cap N(N_2) = S$ が成り立つ. □

極小セパレータ $S$ に対して, 補題 3.3 のような $S$ の配偶者被覆のペア $(N_1, N_2)$ を $S$ **を特定する配偶**

**者被覆ペア**と呼び, $\max\{|N_1|,|N_2|\}$ をそのペアの**サイズ**と呼ぶ.

次の補題と本質的に同じ結果が文献 [5] で示されている.

**補題 3.4.** $\mathcal{G}$ を以下を満たすグラフの集合とする. すなわち, ある定数 $k$ が存在し, 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対する任意の極小セパレータ $S$ に対して, $S$ を特定するサイズが高々 $k$ の配偶者被覆ペアが存在する. このとき, $\mathcal{G}$ は多項式個のセパレータを持つ.

**証明.** 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対し, $G$ の極小セパレータの個数が $O(|V(G)|^{2k})$ であることを示す.

高々 $k$ 頂点から成る $G$ の頂点部分集合の族を $\mathcal{U}_G$ で表す, すなわち $\mathcal{U}_G = \{U \mid U \subseteq V(G), |U| \leq k\}$. $\mathcal{U}_G$ の要素のペアから成る集合 $\{(U_1,U_2) \mid U_1,U_2 \in \mathcal{U}_G\}$ を $\mathcal{P}_G$ で表す. ここで $|\mathcal{P}_G|$ が $O(|V(G)|^{2k})$ であることに注意.

定理の仮定より, 任意の $G \in \mathcal{G}$ の任意の極小セパレータ $S$ に対して, $S$ のサイズが高々 $k$ である配偶者被覆のペア $N_1,N_2$ を割り当てることができる. このときペア $(N_1,N_2)$ は $\mathcal{P}_G$ に属する. したがって, 次を満たす $sep(G)$ から $\mathcal{P}_G$ への写像 $f_G$ が存在する, すなわち $G$ の極小セパレータ $S$ に対し, $f_G(S) \in \mathcal{P}_G$ は $S$ を特定する (サイズが高々 $k$ である) 配偶者被覆のペア.

$f_G$ は単射である. 何故ならば, $S \neq S'$ なる $S,S' \in sep(G)$ に対し $f_G(S) = f_G(S') = (N_1,N_2)$ とすると, $S = N(N_1) \cap N(N_2) = S'$ となり矛盾. $f_G$ が単射であることから $|sep(G)|$ が $O(|V(G)|^{2k})$ であることがいえた. □

**定理 2.** $\mathcal{G}$ が Good ならば $\mathcal{G}$ は多項式個のセパレータを持つ.

**証明.** $\mathcal{G}$ が Good より, $\exists c$ s.t. $\forall G \in \mathcal{G}, \mathrm{wxord}(G) \leq c$ が成り立つ. したがって補題 3.2 より, 任意の $G \in \mathcal{G}$ の任意の極小セパレータ $S$ に対して, $S$ を特定するサイズが高々 $c$ の配偶者被覆が存在する. よって補題 3.4 の条件が成立し, $\mathcal{G}$ が多項式個のセパレータを持つことがいえる. □

## 3.2 Bad なグラフクラス

グラフクラス $\mathcal{G}$ が **Bad** であるとは, 以下を満たすある定数 $c$ が存在するときをいう: $\forall n_0, \exists G \in \mathcal{G}$ s.t. $[|V(G)| \geq n_0 \wedge \mathrm{sxord}(G) \geq \frac{|V(G)|}{c}]$. $\mathcal{G}$ が**指数個の極小セパレータを持つ**とは, ある指数関数 $f$ が存在し, 与えられた任意の $n_0$ に対し, $G \in \mathcal{G}$ が存在し, $|V(G)| \geq n_0$ かつ $|sep(G)| \geq f(|V(G)|)$ であるときをいう.

**補題 3.5.** $(A,B,\Gamma,\Delta)$ を $G$ の強 $X$-type とする. このとき任意の $B' \subset B$ に対して, $B' \cup \overline{B'}$ は $G$ の極小セパレータである. ここで, $\overline{B'}$ は $\Gamma \backslash N(B')$ を表す.

**証明.** 最初に $B' \cup \overline{B'}$ が $G$ のセパレータであることを示す. $x \in A \cup (B \backslash B'), y \in \Delta \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$ とし, $x, y$ に関する場合分けにより, $A \cup (B \backslash B')$ と $\Delta \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$ の間に辺は存在しないことがいえる. また, $A \cup (B \backslash B')$, $\Delta \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$, $B' \cup \overline{B'}$ 以外の $G$ の頂点は存在しない. したがって $B' \cup \overline{B'}$ は $G$ のセパレータである.

強 $X$-type の定義から, 以下を満たす $A' \subseteq A$, $\Delta' \subseteq \Delta$ が存在する:

- $\forall B' \subset B$, $G[A' \cup B']$(よって $G[A' \cup (B \backslash B')]$) が連結,
- $\forall \overline{B'} \subset \Gamma$, $G[\Delta' \cup \overline{B'}]$ (よって $G[\Delta' \cup (\Gamma \backslash \Gamma')]$) が連結.

したがって $G[V(G) \backslash (B' \cup \overline{B'})]$ に $A' \cup (B \backslash B')$ を含む連結成分が存在し, 同様に $\Delta' \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$ を含む連結成分も存在する. それらをそれぞれ $C_{A' \cup (B \backslash B')}$, $C_{\Delta' \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})}$ と表す. ここまでで, $B' \cup \overline{B'}$ が $C_{A' \cup (B \backslash B')}$ と $C_{\Delta' \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})}$ をセパレートすることがいえた.

次に $B' \cup \overline{B'}$ が極小であることを示す. 定理 1 より, コンポーネント $C_{A' \cup (B \backslash B')}$ と $C_{\Delta' \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})}$ が $B' \cup \overline{B'}$ に対してフルコンポーネントであることを示す. ここでは, $(B' \cup \overline{B'}) \subseteq N(A' \cup (B \backslash B'))$ であることをいうために, $B' \subseteq N(A' \cup (B \backslash B'))$ および $\overline{B'} \subseteq N(A' \cup (B \backslash B'))$ の 2 つを示す. ($N(\Delta' \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$ に関しては同様に証明できるので省略).

$B'$ に属する頂点に $C_{A' \cup (B \backslash B')}$ と隣接していないある頂点 $x$ が存在したと仮定する. ここで $y$ を $B \backslash B'$ の任意の頂点とし ($B' \subset B$ より, $B \backslash B' \neq \emptyset$), $B''$ を $x$ の $B$ 内の隣接頂点の集合 $N(x) \cap B$ とする. このとき,

$y \notin N(x)$ より $x,y \notin B''$ に注意すると, $x,y \in (B \backslash B'')$. よって $x,y \in A' \cup (B \backslash B'')$. 一方, $x$ は $G[A' \cup (B \backslash B'')]$ で孤立点となり, 連結性に矛盾.

$\overline{B'}$ の各頂点は配偶者関係より $B \backslash B'$ の頂点と隣接している. よって定理 1 より, $B' \cup \overline{B'}$ は極小セパレータである. □

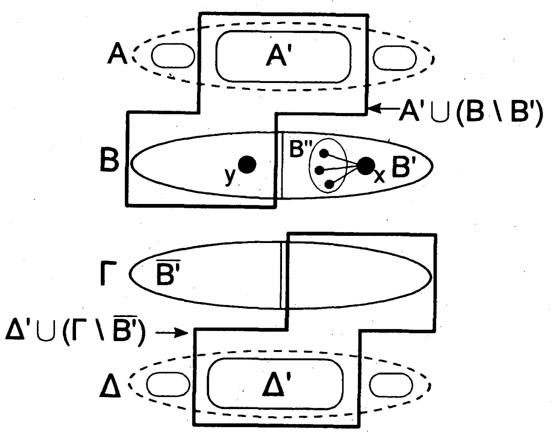


図 5　セパレートされる $A \cup (B \backslash B')$ と $\Delta \cup (\Gamma \backslash \overline{B'})$

**定理 3.** $\mathscr{G}$ が Bad ならば, $\mathscr{G}$ は指数個の極小セパレータを持つ.

**証明.** $\mathscr{G}$ が Bad であることからある定数 $c$ が存在し, 任意の $n_0$ に対して $|V(G)| \geq n_0$ となり, かつ $\mathrm{sxord}(G) \geq \frac{|V(G)|}{c}$ であるような $G \in \mathscr{G}$ が存在する. したがって, $\mathrm{sxord}(G) \geq \frac{|V(G)|}{c}$ を満たす $G$ の強 $X$-type $(A,B,\Gamma,\Delta)$ が存在する.

本定理を証明するには, $|sep(G)| \geq 2^{\mathrm{sxord}(G)} - 2$ であることを示せれば十分である. 任意の $B' \subset B$ に対して $\Gamma \backslash N(B')$ を $\overline{B'}$ と表す. 補題 3.5 より, $G$ において $B' \cup \overline{B'}$ は極小セパレータである. $B'$ のとり方は $2^{\mathrm{sxord}(G)} - 2$ 通りあり, $\forall B'_1, B'_2 \subset B$ に対して $B'_1 \neq B'_2$ ならば $B'_1 \cup \overline{B'}_1 \neq B'_2 \cup \overline{B'}_2$ であるから, 極小セパレータとして取り得る組み合わせは $2^{\mathrm{sxord}(G)} - 2$ 通りとなる. 従って $|sep(G)| \geq 2^{\mathrm{sxord}(G)} - 2$ であることが言え, $G$ の極小セパレータの個数が指数関数 $2^{\mathrm{sxord}(G)} - 2$ 以上であることが示せた. □

## 参考文献

[1] H. L. Bodlaender, T Kloks, and D Kratsch. Treewidth and pathwidth of permutation graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 8, No. 4, pp. 606–616, 1995.

[2] H. L. Bodlaender, T. Kloks, D. Kratsch, and H. Müller. Treewidth and minimum fill-in on d-trapezoid graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 2, No. 5, pp. 1–23, 1998.

[3] V. Bouchitté and I. Todinca. Treewidth and minimum fill-in: Grouping the minimal separators. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 31, No. 1, pp. 212–232, 2001.

[4] M.C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier, 1980.

[5] E. G. Köhler. *Graphs without asteroidal triples*. Ph.D. dissertation, Technischen Universität Berlin, 1999.